46. Die Vektoren v_1, v_2, v_3 sind linear unabhängig, da man keinen aus den anderen linear kombinieren kann.

Wir ergänzen v_1, v_2, v_3 zu einer Basis des $\mathbb{R}^4$. v_1, v_2, v_3, e_1 sind linear unabhängig: wenn $e_1 = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3$ mit $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$, dann ist $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 0$, ein Widerspruch.

Also ist (v_1, v_2, v_3, v_4) eine Basis des $\mathbb{R}^4$ für $v_4 := e_1$.

Wir definieren eine lineare Abbildung $f: \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ durch $f(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 + \lambda_4 v_4) := \lambda_4 e_1$. Für $A = DM(f)$ ist $\mathcal{L}(v_1, v_2, v_3) = \text{Kern}(A)$ (siehe Satz 9.2).

Um A zu berechnen, schreiben wir e_i als Linearkombination von v_1, v_2, v_3, v_4 für $1 \leq i \leq 4$.

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 + \lambda_4 v_4 = e_2$$

$$\Longleftrightarrow \begin{array}{rl} \lambda_1 \qquad\qquad + \lambda_4 & = 0 \\ -2\lambda_3 \qquad & = 1 \\ \lambda_2 \qquad\qquad & = 0 \\ 2\lambda_1 + 3\lambda_2 - \lambda_3 \qquad & = 0 \end{array} \Longleftrightarrow \lambda_2 = 0,\ \lambda_3 = -\frac{1}{2},\ \lambda_1 = -\frac{1}{4},\ \lambda_4 = \frac{1}{4}.$$

$$\Rightarrow f(e_2) = \frac{1}{4} e_1$$

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 + \lambda_4 v_4 = e_3$$

$$\Longleftrightarrow \begin{array}{rl} \lambda_1 \qquad\qquad + \lambda_4 & = 0 \\ -2\lambda_3 \qquad & = 0 \\ \lambda_2 \qquad\qquad & = 1 \\ 2\lambda_1 + 3\lambda_2 - \lambda_3 \qquad & = 0 \end{array} \Longleftrightarrow \lambda_3 = 0,\ \lambda_2 = 1,\ \lambda_1 = -\frac{3}{2},\ \lambda_4 = \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow f(e_3) = \frac{3}{2} e_1$$

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 + \lambda_4 v_4 = e_4$$

$$\Leftrightarrow \begin{aligned} \lambda_1 \qquad\qquad + \lambda_4 &= 0 \\ -2\lambda_3 \qquad &= 0 \\ \lambda_2 \qquad\qquad &= 0 \\ 2\lambda_1 + 3\lambda_2 - \lambda_3 \qquad &= 1 \end{aligned} \quad \Leftrightarrow \lambda_2 = 0,\ \lambda_3 = 0,\ \lambda_1 = \frac{1}{2},\ \lambda_4 = -\frac{1}{2}.$$

$$\Rightarrow f(e_4) = -\frac{1}{2} e_1$$

$$\Rightarrow A = DM(f) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{4} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

47. $v_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_3 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$

$w_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad w_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad w_3 := \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 + \lambda_3 w_3 = v_1$$

$$\Longleftrightarrow \begin{aligned} \lambda_1 \quad\quad + 2\lambda_3 &= 1 \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 \quad\quad &= 1 \\ 2\lambda_2 + \lambda_3 &= 0 \end{aligned} \quad \underset{II-2\cdot I}{\Longleftrightarrow} \quad \begin{aligned} \lambda_1 \quad\quad + 2\lambda_3 &= 1 \\ \lambda_2 - 4\lambda_3 &= -1 \\ 2\lambda_2 + \lambda_3 &= 0 \end{aligned}$$

$$\underset{III-2\cdot II}{\Longleftrightarrow} \begin{aligned} \lambda_1 \quad\quad + 2\lambda_3 &= 1 \\ \lambda_2 - 4\lambda_3 &= -1 \\ 9\lambda_3 &= 2 \end{aligned} \quad \Longleftrightarrow \quad \lambda_3 = \frac{2}{9}, \ \lambda_2 = -\frac{1}{9}, \ \lambda_1 = \frac{5}{9}$$

$$\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 + \lambda_3 w_3 = v_2$$

$$\Longleftrightarrow \begin{aligned} \lambda_1 \quad\quad + 2\lambda_3 &= 0 \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 \quad\quad &= 1 \\ 2\lambda_2 + \lambda_3 &= 0 \end{aligned} \quad \underset{II-2\cdot I}{\Longleftrightarrow} \quad \begin{aligned} \lambda_1 \quad\quad + 2\lambda_3 &= 0 \\ \lambda_2 - 4\lambda_3 &= 1 \\ 2\lambda_2 + \lambda_3 &= 1 \end{aligned}$$

$$\underset{III-2\cdot II}{\Longleftrightarrow} \begin{aligned} \lambda_1 \quad\quad + 2\lambda_3 &= 0 \\ \lambda_2 - 4\lambda_3 &= 1 \\ 9\lambda_3 &= -1 \end{aligned} \quad \Longleftrightarrow \quad \lambda_3 = -\frac{1}{9}, \ \lambda_2 = \frac{5}{9}, \ \lambda_1 = \frac{2}{9}$$

$$\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 + \lambda_3 w_3 \overset{!}{=} v_3$$

$$\iff \begin{array}{rcrcrcl} \lambda_1 & & & + & 2\lambda_3 & = & 1 \\ 2\lambda_1 & + & \lambda_2 & & & = & 0 \\ & & 2\lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 1 \end{array} \quad \underset{II-2\cdot I}{\iff} \quad \begin{array}{rcrcrcl} \lambda_1 & & & + & 2\lambda_3 & = & 1 \\ & & \lambda_2 & - & 4\lambda_3 & = & -2 \\ & & 2\lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 1 \end{array}$$

$$\underset{III-2\cdot II}{\iff} \begin{array}{rcrcrcl} \lambda_1 & & & + & 2\lambda_3 & = & 1 \\ & & \lambda_2 & - & 4\cdot\lambda_3 & = & -2 \\ & & & & 9\lambda_3 & = & 5 \end{array} \quad \iff \lambda_3 = \frac{5}{9},\ \lambda_2 = \frac{2}{9},\ \lambda_1 = -\frac{1}{9}.$$

$$\Rightarrow T_C^B = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ -1 & 5 & 2 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

48. Wir schreiben A für die kanonische Basis des $\mathbb{R}^3$.

$DM(f) = DM_{A,A}(f)$.

$DM_{B,C}(f) = T_C^A \cdot DM(f) \cdot T_A^B$ nach Satz 10.10.

$$T_A^B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Für T_C^A schreiben wir e_i als Linearkombiation von w_1, w_2, w_3.

$\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 + \lambda_3 w_3 = e_1$

$$\iff \begin{array}{rrrl} \lambda_1 & & +2\lambda_3 & = 1 \\ 2\lambda_1 & +\lambda_2 & & = 0 \\ & 2\lambda_2 & +\lambda_3 & = 0 \end{array} \underset{II-2\cdot I}{\iff} \begin{array}{rrl} \lambda_1 & +2\lambda_3 & = 1 \\ \lambda_2 & -4\lambda_3 & = -2 \\ 2\lambda_2 & +\lambda_3 & = 0 \end{array}$$

$$\underset{III-2\cdot II}{\iff} \begin{array}{rrl} \lambda_1 & +2\lambda_3 & = 1 \\ \lambda_2 & -4\lambda_3 & = -2 \\ & 9\lambda_3 & = 4 \end{array} \iff \lambda_3 = \frac{4}{9},\ \lambda_2 = -\frac{2}{9},\ \lambda_1 = \frac{1}{9}.$$

$\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 + \lambda_3 w_3 = e_2$

$$\iff \begin{array}{rrrl} \lambda_1 & & +2\lambda_3 & = 0 \\ 2\lambda_1 & +\lambda_2 & & = 1 \\ & 2\lambda_2 & +\lambda_3 & = 0 \end{array} \underset{II-2\cdot I}{\iff} \begin{array}{rrl} \lambda_1 & +2\lambda_3 & = 0 \\ \lambda_2 & -4\lambda_3 & = 2 \\ 2\lambda_2 & +\lambda_3 & = 0 \end{array}$$

$$\underset{III-2\cdot II}{\iff} \begin{array}{rrl} \lambda_1 & +2\lambda_3 & = 0 \\ \lambda_2 & -4\lambda_3 & = 2 \\ & 9\lambda_3 & = -4 \end{array} \iff \lambda_3 = -\frac{4}{9},\ \lambda_2 = \frac{2}{9},\ \lambda_1 = \frac{8}{9}.$$

$$\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 + \lambda_3 w_3 = e_3$$

$$\Leftrightarrow \begin{array}{rcrcrl} \lambda_1 & & & + & 2\lambda_3 & = 0 \\ 2\lambda_1 & + & \lambda_2 & & & = 0 \\ & & 2\lambda_2 & + & \lambda_3 & = 1 \end{array} \quad \underset{\mathrm{II}-2\cdot\mathrm{I}}{\Leftrightarrow} \quad \begin{array}{rcrcrl} \lambda_1 & & & + & 2\lambda_3 & = 0 \\ & & \lambda_2 & - & 4\lambda_3 & = 0 \\ & & 2\lambda_2 & + & \lambda_3 & = 1 \end{array}$$

$$\underset{\mathrm{III}-2\cdot\mathrm{II}}{\Leftrightarrow} \quad \begin{array}{rcrcrl} \lambda_1 & & & + & 2\lambda_3 & = 0 \\ & & \lambda_2 & - & 4\lambda_3 & = 0 \\ & & & & 9\lambda_3 & = 1 \end{array} \quad \Leftrightarrow \quad \lambda_3 = \frac{1}{9},\ \lambda_2 = \frac{4}{9},\ \lambda_1 = -\frac{2}{9}$$

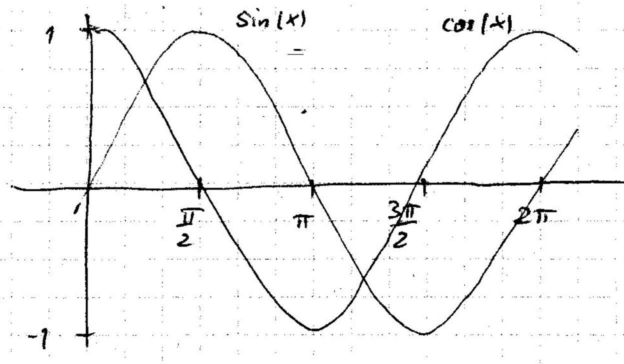
$$\Rightarrow \quad T_C^A = \frac{1}{9} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 8 & -2 \\ -2 & 2 & 4 \\ 4 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T_C^A \cdot DM(f) = \frac{1}{9} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 8 & -2 \\ -2 & 2 & 4 \\ 4 & -4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{9} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 15 & -22 \\ 2 & 6 & 8 \\ 5 & -12 & 11 \end{pmatrix}$$

$$T_C^A \cdot DM(f) \cdot T_A^B = \frac{1}{9} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 15 & -22 \\ 2 & 6 & 8 \\ 5 & -12 & 11 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{9} \cdot \begin{pmatrix} 14 & -7 & -23 \\ 8 & 14 & 10 \\ -7 & -1 & 16 \end{pmatrix}.$$

Alternativ kann man zur Berechnung von $DM_{B,C}(f)$ die Gleichungssysteme $\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 + \lambda_3 w_3 = f(v_i)$ für $i \in \{1, 2, 3\}$ lösen.

49.



Da sin in $(0, \frac{\pi}{2})$ und in $(\frac{3\pi}{2}, 2\pi)$ streng monoton wachsend und in $(\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi)$ streng monoton fallend ist, und da cos in $(0, \pi)$ streng monoton fallend und in $(\pi, 2\pi)$ streng monoton wachsend ist, sind die folgenden angegeben Lösungen in (a), (b), (c) die einzigen Lösungen in $[0, 2\pi)$.

(a) $\sin(x) - \cos(x) = 1$

$\Rightarrow \sin(x) \geq 0, \quad \cos(x) \leq 0, \quad \sin(x) = 1 + \cos(x)$

$\Rightarrow 1 - \cos(x)^2 = \sin(x)^2 = (1 + \cos(x))^2 = 1 + 2\cos(x) + \cos(x)^2$

$\Rightarrow 2\cos(x)^2 + 2\cos(x) = 0$

Also ist $\cos(x) = 0, \quad \sin(x) = 1, \quad x = \frac{\pi}{2}$

oder $\cos(x) = -1, \quad \sin(x) = 0, \quad x = \pi$.

(b) $\sin(x) + \cos(x) = \sqrt{2}$

$\Rightarrow \sin(x) > 0, \quad \cos(x) > 0, \quad \sin(x) = \sqrt{2} - \cos(x)$

$\Rightarrow 1 - \cos(x)^2 = \sin(x)^2 = (\sqrt{2} - \cos(x))^2 = 2 - 2\sqrt{2}\cos(x) + \cos(x)^2$

$\Rightarrow 2\cos(x)^2 - 2\sqrt{2}\cos(x) + 1 = 0$

$\Rightarrow (\sqrt{2}\cos(x) - 1)^2 = 0$

$\Rightarrow \cos(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \sin(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\frac{\pi}{4}$ ist eine Lösung nach Aufgabe 45 (b).

(c) $\sqrt{3}\ \sin(x) + \cos(x) \overset{!}{=} -2$

$\Rightarrow \sin(x) < 0\ ,\ \cos(x) < 0\ ,\quad \sqrt{3}\ \sin(x) = -2 - \cos(x)$

$\Rightarrow 3 - 3\cos(x)^2 = 3\sin(x)^2 = (-2-\cos(x))^2 = 4 + 4\cos(x) + \cos(x)^2$

$\Rightarrow 4\cos(x)^2 + 4\cos(x) + 1 = 0$

$\Rightarrow (2\cos(x) + 1)^2 = 0$

$\Rightarrow \cos(x) = -\frac{1}{2}\ ,\quad \sin(x) = \frac{-3}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}\,.$

$\frac{\pi}{3}$ ist eine Lösung nach Aufgabe 45 (b).

50. Wir schreiben jeweils D für den Definitionsbereich $D \subseteq \mathbb{R}$ von f. Nach den Sätzen 90, 91 und 96 im Vorlesungskonzept ist f jeweils in jedem $x \in D$ differenzierbar.

(a) $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

$$f'(x) = \frac{(1+2x)(1+x) - (1+x+x^2)}{(1+x)^2} = \frac{1+3x+2x^2-1-x-x^2}{(1+x)^2} =$$

$$= \frac{x^2+2x}{(1+x)^2} = \frac{x(x+2)}{(x+1)^2}$$

(b) $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

$$f'(x) = \frac{\cos(x)\ (1-x)\ + \sin(x)}{(1-x)^2}$$

(c) $D = \mathbb{R}$

$$f'(x) = -\sin\left(\frac{1}{1+x^2}\right) \cdot \frac{2x}{(1+x^2)^2}$$

(d) $D = \mathbb{R}$

$$f'(x) = e^{-x^2} \cdot (-2x) = -e^{-x^2} 2x$$

(e) $D = \mathbb{R} \setminus \{n\pi + \frac{\pi}{2} : n \in \mathbb{Z}\}$

$$f'(x) = e^x \tan(x) + \frac{e^x}{\cos(x)^2} = \frac{e^x\ (\sin(x)\cos(x) + 1)}{\cos(x)^2}$$

(f) $D = \mathbb{R}$

$$f'(x) = e^{\cos(x)}\ (-\sin(x)) = -e^{\cos(x)} \sin(x).$$